第28卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 28 No. 1
2011年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2011

文章编号:1005-3085(2011)01-0028-09

非空可测集划分的破碎度量研究*

郭嗣琮

(辽宁工程技术大学理学院，辽宁 阜新 123000)

摘　要: 为解决材料科学中物体破碎度量的数学刻画问题，本文将物体的破碎抽象为具有有限测度的可测集合的一个划分，在分析了用碎块测度描述物体的破碎概念应满足的准则的条件下，依照破碎准则构建了一个能够刻画物体破碎程度的划分测度函数，得到了几何物体破碎程度的数学表达式．同时，研究了所提出的破碎度函数的一些性质，并讨论了几个方面的应用．破碎度的数学表述可以广泛地应用于矿物加工、岩石爆破、医药与食品加工等诸多领域．

关键词: 测度；划分；破碎度；完整度；划分测度函数

分类号: AMS(2000) 28E15　　**中图分类号**: O143　　**文献标识码**: A

1　引言

破碎度的概念被广泛地使用在材料科学[1,2]、爆破科学[3,4]、煤矿安全[5,6]、地理信息科学和旅游景观评价[7] 以及医药、食品加工等诸多领域．然而，至今在数学上对破碎度仍没有一个统一的刻画方式．尽管熵的概念可以描述事物的多样性，但是用来刻画物体的破碎程度还存在不足之处．分形理论[8] 似乎是以“破碎”的几何体为研究背景，但是人们也只是局限于讨论破碎几何体的分形维数[9]．事实上，在工程实际和日常生活中，由于观察对象和研究目的不同，人们对于破碎的理解和描述也不同，因此，破碎度概念本身也难以给出统一的定义．例如，在以粉碎物体为目标的工作中，人们会用被破碎的小碎块测度 (如体积，面积、质量、直径) 来描述物体被破碎的程度；在某些诸如岩石巷道的支护、公路路面的养护等工程问题中，对象的破碎状况不仅仅取决于小碎块的测度，而且也与断裂的裂隙分布形态有关；在图像处理技术的研究中，图像的破碎程度要取决于图像的多种拓扑性质．从这一方面来看，要从数学上对物体破碎程度作出刻画，至少要分为测度和形态两个方面来研究．本文站在用碎块测度描述物体被破碎程度的角度上，给出了破碎概念应满足的准则，并将物体的破碎抽象为可测集合的一个划分，依照破碎准则构建了一个能够刻画破碎程度的划分测度函数为破碎度．本文研究了所提出的破碎度函数的性质，同时讨论了几个方面的应用．

2　基于划分的破碎度与划分测度函数

设 (X,ξ,m) 是一个有限测度空间，其中 X 是具有有限测度的非空集，ξ 为 X 所有子集构成的 σ-代数，m 是 ξ 上的测度．称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 X 的一个 n 划分，若每个 $A_i\in\xi$，且对任何 $i\neq j$，有 $A_i\cap A_j=\Phi$ (空集)，$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=X$，记 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$．A_i 称为 A 的一个划分单元，$i=1,2,\cdots,n$．

收稿日期: 2008-08-04.　**作者简介**: 郭嗣琮 (1951年10月生)，男，教授．研究方向：模糊信息处理技术与软计算．
***基金项目**: 辽宁省教育厅高等学校科研项目 (20060377).

又设$B=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$是X的一个m划分，$m>n$且对于任何$i=1,2,\cdots,m$，B_i要么是n划分A的一个单元，要么是某个$A_k\,(k=1,2,\cdots,n)$的划分单元，则称B是A的细分．例如，设$A=\{A_1,A_2,A_3\}$，$B=\{A_1,A_2,B_1,B_2\}$，其中$B_1\cap B_2=\Phi$，$B_1\cup B_2=A_3$，则B是A的细分．

用$C(X)$表示非空可测集X的所有划分的全体，显然，$X\in C(X)$．

定义 2.1 设A, $B\in C(X)$，如果B是A的细分，称B细于A，记$B\prec A$．

显然，若$A\prec B$且$B\prec C$，则有$A\prec C$；若$A\prec B$且$B\prec A$，则$A=B$，故$(C(X),\prec)$是偏序集．对于X的任何划分A，有$A\prec X$．

我们将可测集X理解为一个可度量的几何体，如一块岩石或一块玻璃，我们将这个物体X打碎成若干个不相连接的小块，即是对X的一个划分．因此，描述X的破碎程度，可取决于对X的划分形式．

定义 2.2 X的破碎度是映射$Fr:C(X)\to[0,1]$且满足

1) 对于$A\in C(X)$, $0\le Fr(A)\le 1$；

2) $Fr(X)=0$；

3) 若$B\prec A$，则$Fr(B)\ge Fr(A)$；

称$Fr(A)$为可测集X在划分A下的破碎度．

在上述定义中，条件2)表示没有被划分的集合的破碎度为零；条件3)表示在划分的基础上再加细划分，破碎度将增大．

在实际应用问题中，经常需要考虑多个破碎对象之间的关系运算，为了区分被破碎的对象，我们将可测集X在划分A下的破碎度记为$Fr(X;A)$，这里X是被破碎的主体，A是破碎的形式．

定义 2.3 *可测集X在划分A下的破碎度为$Fr(X;A)$，称*

$$\overline{Fr(X;A)}=1-Fr(X;A)$$

为X在划分A下的完整度．

容易知道，利用定义2.2来构造划分破碎度表达式是不唯一的．依据人们对于破碎物体的习惯理解，我们补充几个建立划分破碎度表达式的条件．

令$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是具有有限测度的非空可测集X的一个划分，m是X上的测度，则划分A下的破碎度表达式$Fr(X;A)$应满足：

(S_1): $Fr(X;A)$是所有碎块测度$m(A_i)\,(i=1,2,\cdots,n)$的连续函数．

(S_2): 当X被等分成n个测度相同的单元时，此时，每个单元的测度值为X测度值的$1/n$，则划分的完整度应等于$1/n$，于是

$$Fr(X;A)=1-\frac{1}{n}=\frac{n-1}{n},$$

当$n\to\infty$时，$1/n\to 0$, $Fr(X;A)\to 1$．

(S_3): $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$是非空可测集X的一个划分，B是将所有A_i再划分为测度相等的两个子块的划分，即$B=\{A_{11},A_{12},A_{21},A_{22},\cdots,A_{n1},A_{n2}\}$，其中$A_{i1}$, A_{i2}是$A_i\,(i=1,2,\cdots,n)$的划分，且$m(A_{i1})=m(A_{i2})=m(A_i)/2$，则划分$B$的完整度是划分$A$的完整度的二分之一，即

$$\overline{Fr(X;B)}=\frac{1}{2}\cdot\overline{Fr(X;A)}.$$

根据定义2.2和条件(S_1)-(S_3)，我们来构造一个划分的测度函数．

设 m 是 X 上的测度，$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 X 的一个划分，定义划分测度函数

$$f(A)=\sum_{i=1}^{n}m(A_i)\big[m(X)-m(A_i)\big]. \tag{1}$$

显然，$f(A)$ 满足条件 (S_1)，下面证明 $f(A)$ 满足定义 2.2 中的条件 2) 和条件 3).

首先令 $A=X$，则由 (1) 式，有

$$f(X)=m(X)\big[m(X)-m(X)\big]=0.$$

其次，不失一般性，设 X 的两个划分

$$A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\},$$

$$B=\{B_1,\cdots,B_{i-1},B_{i1},B_{i2},\cdots,B_{ik},B_{i+1},\cdots,B_n\},$$

其中 $A_i=B_{i1}\cup B_{i2}\cup\cdots\cup B_{ik}$，当 $j\neq i$ 时，$A_j=B_j$，这里 $B_{i1},B_{i2},\cdots,B_{ik}$ 是 A_i 的一个划分．因而有 $B\prec A$．于是

$$\begin{aligned}
f(B)&=\sum_{j=1}^{n}m(B_j)\big[m(X)-m(B_j)\big]\\
&=\sum_{j\neq i}^{n}m(A_j)\big[m(X)-m(A_j)\big]+\sum_{t=i1}^{ik}m(B_t)\big[m(X)-m(B_t)\big]\\
&\geq\sum_{j\neq i}^{n}m(A_j)\big[m(X)-m(A_j)\big]+\sum_{t=i1}^{ik}m(B_t)\Big[m(X)-m\Big(\bigcup_{t=i1}^{ik}B_t\Big)\Big]\\
&=\sum_{j\neq i}^{n}m(A_j)\big[m(X)-m(A_j)\big]+\big[m(X)-m(A_i)\big]\sum_{t=i1}^{ik}m(B_t)\\
&=\sum_{j\neq i}^{n}m(A_j)\big[m(X)-m(A_j)\big]+m(A_i)\big[m(X)-m(A_i)\big]\\
&=\sum_{j=1}^{n}m(A_j)\big[m(X)-m(A_j)\big]=f(A),
\end{aligned}$$

故有 $f(B)\geq f(A)$.

为使划分测度函数 (1) 满足定义 2.2 中的条件 1)，令 $P_X(A_i)=\frac{m(A_i)}{m(X)}$，称为单元 A_i 关于 X 的相对测度，$i=1,2,\cdots$，并记

$$f_X(A)=\frac{f(A)}{[m(X)]^2},$$

则

$$f_X(A)=\frac{f(A)}{[m(X)]^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m(A_i)}{m(X)}\Big[1-\frac{m(A_i)}{m(X)}\Big]=\sum_{i=1}^{n}P_X(A_i)\big[1-P_X(A_i)\big]. \tag{2}$$

由于 $\sum\limits_{i=1}^{n}P_X(A_i)=1$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}P_X(A_i)\big[1-P_X(A_i)\big]=\sum_{i=1}^{n}P_X(A_i)-\sum_{i=1}^{n}P_X^2(A_i)=1-\sum_{i=1}^{n}P_X^2(A_i), \tag{3}$$

而 $0 \le \sum_{i=1}^{n} P_X^2(A_i) \le 1$，故 $0 \le f_X(A) \le 1$.

容易看出，划分测度函数 $f_X(\cdot)$ 满足条件 (S_2)，下面证明其满足条件 (S_3).

设划分 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，$B=\{A_{11},A_{12},A_{21},A_{22},\cdots,A_{n1},A_{n2}\}$，其中 A_{i1}，A_{i2} 是 A_i $(i=1,2,\cdots,n)$ 的划分，且

$$P_X(A_{i1})=P_X(A_{i2})=\frac{1}{2}P_X(A_i),$$

则

$$\begin{aligned} f_X(B) &= 1-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2}P_X^2(A_{ij})=1-\sum_{i=1}^{n}\left[P_X^2(A_{i1})+P_X^2(A_{i2})\right] \\ &= 1-\sum_{i=1}^{n}2\cdot\left[\frac{1}{2}P_X(A_i)\right]^2=1-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}P_X^2(A_i). \end{aligned}$$

由定义2.3，X 在划分 B 下的完整度为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}P_X^2(A_i),$$

即为在划分 A 下的完整度的二分之一.

综上分析，我们给出一个可以表述可测集 X 划分破碎度的数学表达式.

定义2.4　设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是具有有限测度的非空可测集 X 的一个划分，划分 A 的单元 A_i 关于 X 的相对测度为 $P_X(A_i)$，$i=1,2,\cdots,n$，定义

$$Fr(X;A)=\sum_{i=1}^{n}P_X(A_i)\left[1-P_X(A_i)\right]=1-\sum_{i=1}^{n}P_X^2(A_i) \tag{4}$$

为 X 在划分 A 下的破碎度，并称

$$\overline{Fr(X;A)}=\sum_{i=1}^{n}P_X^2(A_i) \tag{5}$$

为 X 在划分 A 下的完整度.

对于 X 的一个无限划分 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots\}$，则定义

$$Fr(X;A)=1-\sum_{i=1}^{\infty}P_X^2(A_i).$$

3　破碎度的性质

定理3.1　对于具有有限测度的非空可测集 X 的一个 n 划分 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，当 $m(A_1)=m(A_2)=\cdots=m(A_n)$ 时，$Fr(X;A)$ 达到最大.

证明　由于 $m(A_1)=m(A_2)=\cdots=m(A_n)$，意味着 $P_X(A_1)=P_X(A_2)=\cdots=P_X(A_n)=1/n$. 记 $P_X(A_i)=x_i$，$i=1,2,\cdots,n$，则式(4)可写成

$$Fr(X;A)=1-\sum_{i=1}^{n}x^2,$$

且

$$\sum_{i=1}^{n} x = 1, \quad x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

由拉格朗日乘数法，可得到当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1/n$ 时，$Fr(X;A)$ 取最大值，故定理3.1成立.

定理3.1说明，将一个物体打破成 n 块，如果 n 一旦被确定，则每个子块测度均等时，物体的破碎度最大. 此时，有

$$Fr(X;A) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P_X^2(A_i) = 1 - n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{n-1}{n}. \tag{6}$$

当 $n \to \infty$ 时，$Fr(X;A) = (n-1)/n \to 1$，这说明只有当物体被均匀分解为无限多的测度趋于无穷小的单元时，破碎度趋于1，这一结论与我们对破碎性的理解是一致的.

定理3.2　设 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 X 的一个划分，且 $B_1 = \{B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{1k_1}\}$，$B_2 = \{B_{21}, B_{22}, \cdots, B_{2k_2}\}, \cdots, B_n = \{B_{n1}, B_{n2}, \cdots, B_{nk_n}\}$ 分别是对 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的划分，则

$$B = \{B_{11}, B_{12}, \cdots, B_{1k_1}, B_{21}, B_{22}, \cdots, B_{2k_2}, \cdots, B_{n1}, B_{n2}, \cdots, B_{nk_n}\}$$

是 A 的一个细分，有

$$Fr(X;B) = 1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_j} P_{A_i}^2(B_{ij}) \cdot P_X^2(A_i), \tag{7}$$

其中 $P_{A_i}(B_{ij}) = \frac{m(B_{ij})}{m(A_i)}$ 为 B_{ij} 关于 A_i 的相对测度.

证明　由式(4)，有

$$Fr(X;B) = 1 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_j} P_X^2(B_{ij}), \tag{8}$$

其中 $P_X(B_{ij})$ 是 B_{ij} 关于 X 的相对测度. 由于 $B_{ij} \subseteq A_i$，于是

$$P_X(B_{ij}) = \frac{m(B_{ij})}{m(X)} = \frac{m(B_{ij})}{m(A_i)} \cdot \frac{m(A_i)}{m(X)} = P_{A_i}(B) \cdot P_X(A_i),$$

代入式(8)，则定理3.2成立.

在定理3.2中，$B_i = \{B_{i1}, B_{i2}, \cdots, B_{ik_i}\}$ 是集合 A_i 的一个划分，显然 $\sum\limits_{j=1}^{k_i} P_{A_i}^2(B_{ij})$ 是集合 A_i 在划分 B_i 下的完整度，故记

$$\sum_{j=1}^{k_i} P_{A_i}^2(B_{ij}) = \overline{Fr(A_i;B_i)},$$

于是，式(7)可以写成

$$Fr(X;B) = 1 - \sum_{i=1}^{n} \overline{Fr(A_i;B_i)} \cdot P_X^2(A_i). \tag{9}$$

定理3.2的结论也可以推广到对 X 的一个无限划分情形中去，此处不赘述.

定理3.3　设 $A = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 是 X 的一个划分，$B = \{B_1, B_2, \cdots, B_m\}$ 是 Y 的一个划分，X 和 Y 是两个互不相交的非空可测集，定义

$$A \cup B = \{A_1, A_2, \cdots, A_n, B_1, B_2, \cdots, B_m\}$$

为 $X\cup Y$ 的一个划分，并记

$$P_{X\cup Y}(X)=\frac{m(X)}{m(X\cup Y)},\quad P_{X\cup Y}(Y)=\frac{m(Y)}{m(X\cup Y)},$$

则

$$Fr\big(X\cup Y;A\cup B\big)=1-\big[\,\overline{Fr(X;A)}\cdot P^2(X\,|\,X\cup Y)+\overline{Fr(Y;B)}\cdot P^2_{X\cup Y}(Y)\big].\tag{10}$$

证明　记 $P_{X\cup Y}(A_i)$ 和 $P_{X\cup Y}(B_j)$ 分别为 A_i 和 B_j 关于 $X\cup Y$ 的相对测度，并且 $i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,m$. 由式 (5)，有

$$\overline{Fr(X\cup Y;A\cup B)}=\sum_{i=1}^{n}P^2_{X\cup Y}(A_i)+\sum_{j=1}^{m}P^2_{X\cup Y}(B_j),\tag{11}$$

而

$$P_{X\cup Y}(A_i)=\frac{m(A_i)}{m(X\cup Y)}=\frac{m(A_i)}{m(X)}\cdot\frac{m(X)}{m(X\cup Y)}=P_X(A_i)\cdot P_{X\cup Y}(X).$$

类似地，可得到

$$P_{X\cup Y}(B_j)=P_X(B_j)\cdot P_{X\cup Y}(Y),$$

代入式 (11)，得到

$$\begin{aligned}\overline{Fr(X\cup Y;A\cup B)}&=\sum_{i=1}^{n}P^2_X(A_i)\cdot P^2_{X\cup Y}(X)+\sum_{j=1}^{m}P^2_Y(B_j)P^2_{X\cup Y}(Y)\\&=\overline{Fr(X;A)}\cdot P^2_{X\cup Y}(X)+\overline{Fr(Y;B)}\cdot P^2_{X\cup Y}(Y).\end{aligned}$$

于是

$$Fr\big(X\cup Y;A\cup B\big)=1-\big[\,\overline{Fr(X;A)}\cdot P^2(X\,|\,X\cup Y)+\overline{Fr(Y;B)}\cdot P^2_{X\cup Y}(Y)\big].$$

两个划分 A, B 的并运算 $A\cup B$ 的背景是将两个破碎的几何体并在一起，则 $Fr(X\cup Y;A\cup B)$ 表示合并后的几何体的破碎程度. 只要稍加注意即可看出，定理3.3是式 (9) 的特例，只是两者的解释不同.

由 $\overline{Fr(X;A)}=1-Fr(X;A)$, $\overline{Fr(Y;B)}=1-Fr(Y;B)$，代入式 (10)，得到

$$\begin{aligned}Fr(X\cup Y;A\cup B)&=1-\big[(1-Fr(X;A))\cdot P^2_{X\cup Y}(X)+(1-Fr(Y;B))\cdot P^2_{X\cup Y}(Y)\big]\\&=1-P^2_{X\cup Y}(X)-P^2_{X\cup Y}(Y)+Fr(X;A)\cdot P^2_{X\cup Y}(X)\\&\quad+Fr(Y;B)\cdot P^2_{X\cup Y}(Y).\end{aligned}$$

记 $M=\{X,Y\}$，由于 X 和 Y 互不相交，则 M 是可测集 $X\cup Y$ 的一个划分，由式 (6) 知，集合 $X\cup Y$ 在划分 M 下的破碎度为 $Fr(X\cup Y;M)=1-P^2_{X\cup Y}(X)-P^2_{X\cup Y}(Y)$，于是有

$$Fr(X\cup Y;A\cup B)=Fr(X\cup Y;M)+Fr(X;A)\cdot P^2_{X\cup Y}(X)+Fr(Y;B)\cdot P^2_{X\cup Y}(Y).\tag{12}$$

有时我们仅仅关心一个几何体的破碎程度，而对其划分形式不感兴趣. 此时，为了表述上的方便，在不至于引起混淆的情况下，具有有限测度的可测集 X (在某个划分下) 的破碎度可以简记为 $Fr(X;*)$. 由式 (12)，我们不难得到如下推论.

推论 3.1 设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 X 的一个划分，且 A_i 在某个划分下的破碎度为 $Fr(A_i;*)$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，则 X 的破碎度为

$$Fr(X;*)=Fr(X;A)+\sum_{i=1}^{n}Fr(A_i;*)\cdot P_X^2(A_i). \tag{13}$$

A_i 和 B_j 分别是 X 和 Y 的子集，$A_i\times B_j=\{(x,y)\,|\,x\in X,\ y\in Y\}$. 设 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$ 是 X 的一个划分，$B=\{B_1,B_2,\cdots,B_m\}$ 是 Y 的一个划分，则定义笛卡尔乘积集 $X\times Y$ 上的划分如下

$$A\times B=\{A_i\times B_j\,|\,A_i\in A,\ B_i\in B,\ i=1,2,\cdots,n;\ j=1,2,\cdots,m\}.$$

定理 3.4 A 和 B 分别是 X 和 Y 的划分，则划分 $A\times B$ 下 $X\times Y$ 的破碎度为

$$Fr(X\times Y;A\times B)=Fr(X;A)+Fr(Y;B)-Fr(X;A)\cdot Fr(Y;B). \tag{14}$$

证明 记 $P_X(A_i)$, $P_Y(B_j)$ 分别为 A_i 关于 X 的相对测度和 B_j 关于 Y 的相对测度，$i=1,2,\cdots,n$; $j=1,2,\cdots,m$，则 $A_i\times B_j$ 关于 $X\times Y$ 的相对测度为 $P_X(A_i)\cdot P_Y(B_j)$. 于是

$$\begin{aligned}
Fr(X\times Y;A\times B) &= 1-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[P_X(A_i)\cdot P_Y(B_j)\right]^2\\
&= 1-\sum_{i=1}^{n}P_X^2(A_i)\sum_{j=1}^{m}P_Y^2(B_j)=1-\overline{Fr(X;A)}\cdot\overline{Fr(Y;B)}\\
&= 1-\left[1-Fr(X;A)\right]\cdot\left[1-Fr(Y;B)\right]\\
&= 1-\left[1-Fr(X;A)-Fr(Y;B)+Fr(X;A)\cdot Fr(Y;B)\right]\\
&= Fr(X;A)+Fr(Y;B)-Fr(X;A)\cdot Fr(Y;B).
\end{aligned}$$

4 破碎度概念的应用

4.1 工程中岩体破碎度的估计

在许多工程实际中破碎度是个重要的指标，如在某些岩石爆破中通过对岩石的破碎情况来检验爆破的效果，在煤巷掘进中通过对钻孔煤屑的破碎程度检验来预测煤与瓦斯突出的危险程度，等等. 但是，无论是岩石爆破还是煤岩的钻探，破碎体常常是由成千上万个小的碎块(单元)组成. 为了描述其破碎程度，需要对这成千上万个单元逐一进行测量是根本无法做到的，为此，我们给出一种破碎度近似计算方法.

设 M 为破碎物体的所有碎块(单元)的集合，我们可将 M 中碎块按照某种测度(如体积，直径或重量)的大小分成 n 个等级区间 $[x_0,x_1],(x_1,x_2],\cdots,(x_{n-1},x_n]$，其中 x_0 和 x_n 分别为所有碎块测度的最小值和最大值，且 $x_0<x_1<x_2\cdots<x_n$. 用 A_i 表示所有测度值落于区间 $(x_{i-1},x_i]$ 内的碎块的全体，并假设 x_i-x_{i-1} 是个较小的数，$i=1,2,\cdots,n$. 记 $A=\{A_1,A_2,\cdots,A_n\}$，显然，A 是 M 的一个划分.

由于对于任何 i，x_i-x_{i-1} 是个较小的数，我们假设 A_i 中所有碎块的测度值都是均等的，可以近似地用平均测度值 $\bar{x}_i=(x_i-x_{i-1})/2$ 表示. 设 $m(A_i)$ 是 A_i 的测度(通常是容易得

到的)，由 $m(A_i)$ 和 $\bar{x}_i$ 可以得到 A_i 中碎块(单元)的数目 $N_i = \langle m(A_i)/\bar{x}_i \rangle$，其中 $\langle x \rangle$ 表示对实数 x 取整.

在 A_i 中所有碎块的测度值是均等的假设下，由式(6)，A_i 的破碎度为

$$Fr(A_i;*) = \frac{N_i - 1}{N_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

令

$$P(A_i) = \frac{m(A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} m(A_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

于是，由式(13)，破碎体 M 的破碎度为

$$Fr(M;*) = Fr(M;A) + \sum_{i=1}^{n} Fr(A_i;*) \cdot P^2(A_i),$$

其中

$$Fr(M;A) = 1 - \sum_{i=1}^{n} P^2(A_i).$$

4.2 破碎度在遗传算法中的应用

在遗传算法中，群体中个体的多样性是判断算法收敛性的一个重要指标[10]，个体多样性的过早减少被称为“早熟”．为了防止早熟，需要在遗传操作过程中不断地判定个体的多样性，并以此来调整控制参数．破碎度可以被用以作为描述个体多样性的指标．

设遗传算法第 t 代的群体规模为 n，将相同的个体进行归类，得到了 $m(t)$ 个个体的集合 $A_1, A_2, \cdots, A_{m(t)}$，$m(t) \le n$，对于任何 i，A_i 中个体相同；若 $i \ne j$，A_i 与 A_j 中没有相同个体．$x_1, x_2, \cdots, x_{m(t)}$ 分别表示 $A_1, A_2, \cdots, A_{m(t)}$ 中个体的数量，记

$$P(A_i) = \frac{x_i}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, m(t).$$

令

$$N(t) = 1 - \sum_{i=1}^{m(t)} P^2(A_i) = 1 - \frac{1}{n^2}(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{m(t)}^2)$$

为第 t 代群体中个体的多样性指标．易知，若群体中所有个体完全相同时，$N(t) = 0$；若群体中所有个体均不相同时，$N(t) = \frac{n-1}{n}$．

参考文献：

[1] 徐小荷，余静. 岩石破碎学[M]. 北京：煤炭工业出版社，1984
Xu X H, Yu J. Rock Fragmentation Theory[M]. Beijing: Mining Industry Press, 1984

[2] 母福生. 破碎理论的研究现状及发展要求[J]. 硫磷设计与粉体工程，2001, 3: 20-23
Mu F S. Current status and development requirements for research of theory of comminution[J]. Sulphur Phosphorus and Bulk Materials Handling Related Engineering, 2001, 3: 20-23

[3] 黄绍钧，郝志信. 水下岩塞爆破技术[M]. 北京：水利电力出版社，1993
Huang S J, Hao Z X. Underwater Plug Blasting Techniques[M]. Beijing: Hydraulic & Power Press, 1993

[4] 孙波勇等. 爆破作用下岩石破碎理论模型的研究及发展趋势[J]. 金属矿山，2006, 9: 240-244
Sun B Y, *et al*. Status of theoretical model research for rock blasting and its development trend[J]. Metal Mine, 2006, 9: 240-244

[5] 贾祥云. 顶板破碎度的应用分析[J]. 煤矿安全工程学报，1991, 3: 41-45
Jia X Y. Application analysis of roof broken metrology[J]. Journal of Mining and Safety Engineering, 1991, 3：41-45
[6] 梁富生. 放顶煤煤体破碎度试验研究[J]. 科技情报开发与经济，2005, 15(13): 170-171
Liang F S. Experimental research on the broken lumpiness of the top coal[J]. Sci-Tech Information Development & Economy, 2005, 15(13): 170-171
[7] 李哈滨，伍业钢. 景观生态学的数量研究方法，当代生态博论[M]. 北京：中国科学技术出版社，1992
Li H B, Wu Y G. Quantitative Methods in Landscape Ecology Analysis, Modern Ecology[M]. Beijing: China Science/Technology Press, 1992
[8] Mandelbrot B B. The Fractal Geometry of Nature[M]. Freeman: San Francisco, 1982
[9] 高峰，赵鹏. 岩石破碎度的分形度量[J]. 力学与实践，1994, 16(2): 16-17
Gao F, Zhao P. Fractal discrimination of rock fragmentation[J]. Mechanics and Practice, 1994, 16(2): 16-17
[10] 郭嗣琮，陈刚. 信息科学中的软计算方法[M]. 沈阳：东北大学出版社，2001
Guo S Z, Chen G. Method of Soft Computing in Information Science[M]. Shenyang: Northeast University Press, 2001

The Metrology Study of Fragmentation Properties for Partition of Nonempty Measurable Set

GUO Si-zong

(College of Science, Liaoning Technical University, Fuxin, Liaoning 123000)

Abstract: This paper deals with the issue of the mathematical description of measuring the broken state of the object in material science. We look upon a broken object as a partition of measurable set with a finite measure, and develop a mathematical formulation, which is a partitioning measure function, to describe the broken state of geometric solids. The formulation is constructed based on the analysis of the principle which must be satisfied for expressing the concept of fragmentation in terms of fragment measure. We also derive some properties of partitioning measure function and discuss its applications. The mathematical description of the fragment measure can be widely used in the field of rock blasting, mineral processing, medicine production and food handing, etc.

Keywords: measure; partition; broken degree; complete degree; measure function of partition

Received: 04 Aug 2008. **Accepted:** 07 Jan 2010.
Foundation item: The Educational Department University Research Foundation of Liaoning Province (20060377).